7.1.4 Eigenschaften von Handlungen

Wir stellen hier einige (oft einfache) Eigenschaften von Handlungen zusammen, die wir später benutzen werden. Eigenschaften ohne Beweis ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen.

Alle Eigenschaften und Lemmata in diesem Abschnitt gelten analog für Subjekte, Operationen und Granule. Wir benutzen soweit wie möglich eine von diesen drei Kategorien unabhängige Notation und sonst stellvertretend für alle Kategorien die Notation für Subjekte.

7.1.4.1 Eigenschaften bzgl. Klassenmitgliedschaften

Bemerkung 3.5: Sei o ein Objekt und c eine Klasse (derselben Kategorie).

$o \quad mc(c) \Leftrightarrow c \quad classes(o)$

Wir können die charakteristischen Objekte auch dafür verwenden, um eine Klasse eindeutig zu identifizieren.

Bemerkung 3.6: Sei _c ein charakteristisches Objekt der Klasse c und c' ein Klasse der gleichen Kategorie. Dann gilt:

(a) _c mc(c') ⇔ c=c'

(b) Gehört kein Objekt mehr als einer Klasse an, so ist jedes Objekt ein charakteristisches Objekt.

(c) Gibt es keine leeren Klassen und gehört kein Objekt mehr als einer Klasse an, so enthält insbesondere jede Klasse ein charakteristisches Objekt.

Definition 3.7:
Sei setofclasses eine Menge von Klassen (derselben Kategorie).
Dann bezeichnen wir die Menge der Objekte dieser Klassen mit
members(setofclasses) := c setofclasses mc(c)

Lemma 3.8:
Seien setofclasses' und setofclasses Mengen von Klassen (einer Kategorie).
(a) Dann gilt:
setofclasses' setofclasses members(setofclasses') members(setofclasses)
(b) Enthält jede Klasse ein charakteristisches Objekt, so gilt auch die Umkehrung:
members(setofclasses') members(setofclasses) setofclasses' setofclasses

Beweis: (a): unmittelbar mit Definition 3.7.
(b): members(setofclasses') members(setofclasses)

(Def. 3.7)

c' setofclasses' mc(c') c setofclasses mc(c)

Annahme: Es gilt nicht: setofclasses' setofclasses

Dann c* setofclasses': c* setofclasses

(Existenz eines charakteristischen Objekts)

_c* c' setofclasses' mc(c'), aber _c* c setofclasses mc(c)

c' setofclasses' mc(c') _ c setofclasses mc(c)

Widerspruch.

7.1.4.2 Eigenschaften bzgl. einer Klassenhierarchie

Zunächst betrachten wir die Beziehungen bzgl. einer einzigen Klassenhierarchie.

Bemerkung 3.9: Seien c und c' Klassen (derselben Kategorie).

$c' \quad superclasses(c) \Leftrightarrow c' \geq c \Leftrightarrow$ (3.9a)

$c \leq c' \Leftrightarrow c \quad subclasses(c')$ (3.9b)

Lemma 3.10: Seien c_1 und c_2 Klassen einer Kategorie.
Dann ist eine Klasse c_2 Oberklasse von einer Klasse c_1 genau dann, wenn c_2 alle Unterklassen von c_1 als Unterklassen besitzt:

$c_1 \leq c_2 \Leftrightarrow subclasses(c_1) \quad subclasses(c_2) \Leftrightarrow \{c' \mid c' \leq c_1\} \quad \{c' \mid c' \leq c_2\}$

Beweis: "   ":

$c_1 \leq c_2$

(Transitivität von ≤)

$(c' \leq c_1 \quad c' \leq c_2)$

$\{c' \mid c' \leq c_1\} \quad \{c' \mid c' \leq c_2\}$

(Bem. 3.9b)

$subclasses(c_1) \quad subclasses(c_2)$

"   ":

$subclasses(c_1) \quad subclasses(c_2)$

(Bem. 3.9b)

$$\{c' \mid c' \leq c_1\} \quad \{c' \mid c' \leq c_2\}$$

$$(c' \leq c_1 \qquad c' \leq c_2)$$

(c'=c1)

$$c_1 \leq c_2$$

•

Lemma 3.11: Sei o ein Objekt und c eine Klasse (derselben Kategorie).
Dann gehört ein Objekt o genau dann zu einer Oberklasse c* einer Klasse c, wenn o in der Vereinigungsmenge der Objekte aller Oberklassen von c liegt:

$$c^* \quad \mathrm{classes}(o): c^* \geq c \;\Leftrightarrow\; o \quad \mathrm{members}(\mathrm{superclasses}(c)).$$

Beweis: " ":

$$c^* \quad \mathrm{classes}(o): c^* \geq c$$

(Bem. 3.5, Bem. 3.9a)

$$c^* \quad SC: o \quad \mathrm{mc}(c^*) \qquad c^* \quad \mathrm{superclasses}(c)$$

(c*   superclasses(c))

$$o \qquad {}_{c' \quad \mathrm{superclasses}(c)}\, \mathrm{mc}(c')$$

(Def. 3.7)

$$o \quad \mathrm{members}(\mathrm{superclasses}(c))$$

" ":

$$o \quad \mathrm{members}(\mathrm{superclasses}(c))$$

(Def. 3.7)

o   c'   superclasses(c) mc(c')

c'   superclasses(c): o   mc(c')

(Def. 3.3)

c'   superclasses(c): c'   classes(o)

classes(o) $\cap$ superclasses(c) $\neq \emptyset$

c*   classes(o): c*   superclasses(c)

(Bem. 3.9a)

c*   classes(o): c*$\geq$c •

Korollar 3.12:
Gehört ein Objekt o nur zu einer Klasse c, so gilt offensichtlich:
classes(o)$\geq$c $\Leftrightarrow$ o   members(superclasses(c))

Analog gilt:
Lemma 3.13: Sei o ein Objekt und c eine Klasse (derselben Kategorie).
Dann gehört ein Objekt o genau dann zu einer Unterklasse c* einer Klasse c, wenn o in der Vereinigungsmenge der Objekte aller Unterklassen von c liegt:
c*   classes(o): c*$\leq$c $\Leftrightarrow$ o   members(subclasses(c)).

Beweis: "   ":

c*   classes(o): c*≤c

(Bem. 3.5, Bem. 3.9b)

c*   SC: o   mc(c*)   c*   subclasses(c)

(c*   subclasses(c))

o $_{\text{c'} \quad \text{subclasses(c)}}$ mc(c')

(Def. 3.7)

o   members(subclasses(c))

"   ":

o   members(subclasses(c))

(Def. 3.7)

o $_{\text{c'} \quad \text{subclasses(c)}}$ mc(c')

c'   subclasses(c): o   mc(c')

(Def. 3.3)

c'   subclasses(c): c'   classes(o)

classes(o) ∩ subclasses(c) ≠ Ø

c*   classes(o): c*   subclasses(c)

(Bem. 3.9b)

c*   classes(o): c*≤c •

Korollar 3.14:
Gehört ein Objekt o nur zu einer Klasse c, so gilt offensichtlich:
classes(o)≤c $\Leftrightarrow$ o members(subclasses(c)).

Lemma 3.15: Seien c_1 und c_2 Klassen (derselben Kategorie). Dann gilt:

(a) members(superclasses(c_1)) ∩ members(subclasses(c_2)) ≠ Ø

$\Leftrightarrow$ o S: c,c' classes(o): c_1≤c c'≤c_2

(b) Sei c_1 oder c_2 nicht-leer. Dann gilt:
c_1≤c_2 members(superclasses(c_1)) ∩ members(subclasses(c_2)) ≠ Ø.

(c) Sei c_1 oder c_2 nicht-leer und gehört jedes Objekt zu höchstens einer Klasse, dann gilt:
c_1≤c_2 $\Leftrightarrow$ members(superclasses(c_1)) ∩ members(subclasses(c_2)) ≠ Ø.

Beweis: (a)

members(superclasses(c_1)) ∩ members(subclasses(c_2)) ≠ Ø

$\Leftrightarrow$

o S: o members(superclasses(c_1)) o members(subclasses(c_2))

$\Leftrightarrow$ (Lemma 3.11 und Lemma 3.13)

o S: c classes(o): c≥c_1 c' classes(o): c'≤c_2

$\Leftrightarrow$

o S: c,c' classes(o): c_1≤c c'≤c_2

(b) Ist c_1 nicht-leer, so sei o   mc(c_1) und wir erhalten:
$c_1 \leq c_2$

o   S: c_1 classes(o): $c_1 \leq c_1$ $c_1 \leq c_2$

Ist c_2 nicht-leer, so sei o   mc(c_2) und wir erhalten:
$c_1 \leq c_2$

o   S: c_2 classes(o): $c_1 \leq c_2$ $c_2 \leq c_2$

Im beiden Fällen erhalten wir:

⇔ (Lemma 3.15(a))
members(superclasses(c_1)) ∩ members(subclasses(c_2)) ≠ Ø

(c) Wegen (b) ist nur noch "   " zu zeigen:
Da jedes Objekt zu höchstens einer Klasse gehört, gilt c=c'.
Daraus ergibt sich unmittelbar: $c_1 \leq c_2$. •

Bemerkung 3.16: Sind c_1 und c_2 beides leere Klassen, so kann (z.B. wenn c_1 und c_2 keine anderen Ober- und Unterklassen haben)
members(superclasses(c_1)) ∩ members(subclasses(c_2)) = Ø sein, obwohl $c_1 \leq c_2$ gilt.

Bemerkung 3.17:

(a) Gehört ein Objekt o mehreren Klassen der gleichen Kategorie an, so braucht $c_1 \leq c_2$ nicht zu gelten, damit members(superclasses(c_1)) $\cap$ members(subclasses(c_2)) $\neq$ Ø, siehe Bild 3.7.
(b) Diese Eigenschaft wird ebenfalls nicht garantiert, wenn jede Klasse ein charakteristisches Objekt enthält.

$$
\begin{array}{lcl}
o \quad mc(c) \quad c & & c \quad superclasses(c_1) \\
\downarrow & & \\
c_1 & & \\
\downarrow & & c_1 > c_2 \; ! \\
c_2 & & \\
\downarrow & & \\
o \quad mc(c') \quad c' & & c' \quad subclasses(c_2)
\end{array}
$$

Bild 3.7: Gegenbeispiel (zu Bemerkung 3.17(a))

Lemma 3.18: Seien c_1 und c_2 Klassen (derselben Kategorie).
(a) Dann gilt:
members(subclasses(c_1)) $\cap$ members(subclasses(c_2)) $\neq$ Ø
$\Leftrightarrow$ o S: c,c' classes(o): $c \leq c_1$ $c' \leq c_2$

(b) Seien alle Klassen der betrachteten Kategorie (hier beispielhaft Subjekte) nicht-leer und gehört jedes Objekt zu höchstens einer Klasse, dann gilt:

$c_3 \quad SC: c_3 \leq c_1 \quad c_3 \leq c_2$

$\Leftrightarrow$ members(subclasses(c_1)) $\cap$ members(subclasses(c_2)) $\neq \emptyset$

Beweis: (a)

$o \quad S: \quad c, c' \quad$ classes(o): $c \leq c_1 \quad c' \leq c_2$

$\Leftrightarrow$

$o \quad S: \quad c \quad$ classes(o): $c \leq c_1 \qquad c' \quad$ classes(o): $c' \leq c_2$

$\Leftrightarrow$ (Lemma 3.13)

$o \quad S: o \quad$ members(subclasses(c_1)) $\quad o \quad$ members(subclasses(c_2))

$\Leftrightarrow$

members(subclasses(c_1)) $\cap$ members(subclasses(c_2)) $\neq \emptyset$

(b) "   ":

$c_3 \quad SC: c_3 \leq c_1 \quad c_3 \leq c_2$

(c_3 nicht-leere Klasse, sei $o_3 \quad mc(c_3)$)

$o_3 \quad S \qquad c_3 \quad$ classes(o_3): $c_3 \leq c_1 \quad c_3 \leq c_2$

(Lemma 3.18(a), $c=c'=c_3$)

members(subclasses(c_1)) $\cap$ members(subclasses(c_2)) $\neq \emptyset$

"   ":

members(subclasses(c_1)) $\cap$ members(subclasses(c_2)) $\neq \emptyset$

(Lemma 3.18(a))

$o \quad S \qquad c,c' \quad classes(o): c \leq c_1 \quad c' \leq c_2$

(Klasse von o eindeutig: $c=c'=:c_3$)

$o \quad S \qquad c_3 \quad classes(o): c_3 \leq c_1 \quad c_3 \leq c_2$

$c_3 \quad SC: c_3 \leq c_1 \quad c_3 \leq c_2$ •